Μαθημα 2ο

15/10/2018

ΑΕΣΔΕ

■ Μη γραμμικα προβληματα ΣΔΕ

→ Προβλημα Αρχικων Τιμων (ΠΑΤ)

$$(1)\quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Ζητουμε την $y(t)$ οπου $y: [a,b] \to \mathbb{R}$ η λυση του ΠΑΤ

Υποθετω οτι $f \in C^0([a,b] \times \mathbb{R})$, επισης η $y \in C^1([a,b])$

■ Υπαρξη και μοναδικοτητα λυσεων ΣΔΕ

■ Θεωρημα 1: ΟΛΙΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ

Αν η $f \in C^0([a,b] \times \mathbb{R})$ ① και πληροι τη συνθηκη Lipschitz ②

δηλ $\exists L>0, \forall t \in [a,b], \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| \leq L|y_1 - y_2|$

τοτε $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ το ΠΑΤ (1) εχει μοναδικη λυση.

{①,② προϋποθεσεις για να εχει το ΠΑΤ μοναδικη λυση}

{η λυση $y \in C^1([a,b])$ και Σ.Τ $\mathbb{R}$ θεωρητικα}

■ Θεωρημα 2 ΤΟΠΙΚΗ ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΛΥΣΗΣ

Εστω $c>0$ και $f \in C^0([a,b] \times [y_0 - c, y_0 + c])$ ① και η f πληροι τη συνθηκη Lipschitz ② στο $[a,b] \times [y_0 - c, y_0 + c]$, δηλαδη:

$\exists L>0, \forall t \in [a,b'], \forall y_1, y_2 \in [y_0 - c, y_0 + c] : |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| \leq L|y_1 - y_2|$

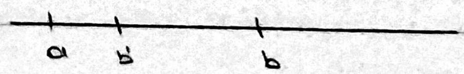
τοτε το ΠΑΤ (1) λυνεται μονοσημαντα τουλαχιστον στο $[a,b']$ με

$b' = \min(b + \frac{c}{A})$, $A = \max_{\substack{t \in [a,b] \\ y \in [y_0 - c, y_0 + c]}} |f(t,y)|$

{①,② προϋποθεσεις για να εχει το ΠΑΤ λυση}

→ οχι σε ολο το διαστημα → τοπικα αναλογα με το $\max|f(t,y)|$

μπορω να περιοριστω σε πολυ μικρο διαστημα → πολυ κοντα στο a



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Λυση του ΠΑΤ : $\begin{cases} y'(t) = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$, $t \in [0,2]$

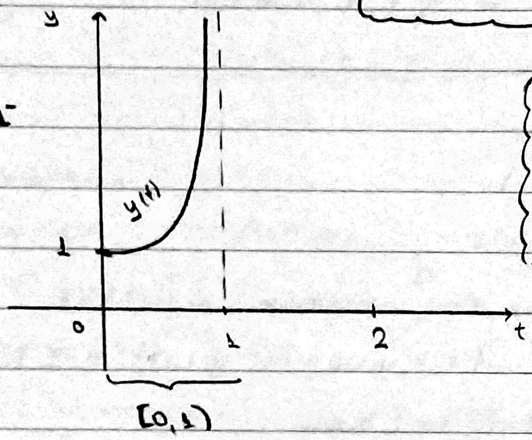
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\frac{y'}{y^2} = 1 \overset{y^2 \neq 0}{\Longrightarrow} \int_{y_0}^{y(t)} \frac{y'}{y^2} = \int_0^t dt' \Rightarrow -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y_0} = t \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{1}{y_0 - t} \overset{y(0)=1}{\Longrightarrow} \boxed{y(t) = \frac{1}{1-t}}$$

→ μερικη λυση του ΠΑΤ
→ Αναλυτικη λυση

οταν $t \to 1^-$



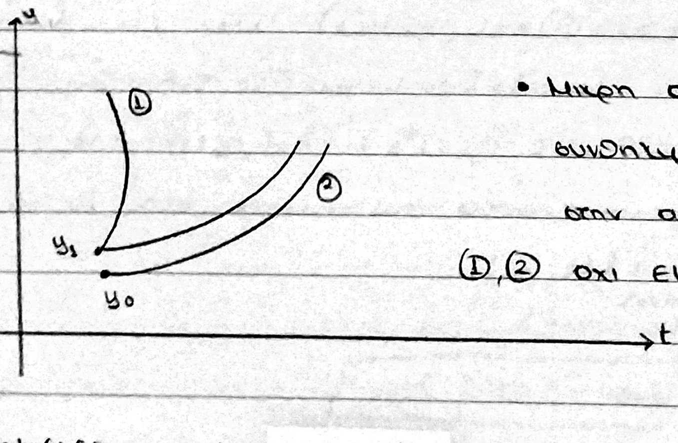
Π.Ο : $[0,2]$, περιοριζομαι ομως στο $[0,1)$ σε μικροτερο διαστημα δηλ, λογω φυσης του προβληματος . Η λυση αυτη δεν οριζεται σε ολο το διαστημα

Στο 1 η λυση απειριζεται

⊕ Μπορω να εχω αναλυτικη λυση αλλα οχι αριθμητικα

→ Συνεχη εξαρτηση απο τα αρχικα δεδομενα

■ Ευσταθης λυση του ΠΑΤ



• Μικρη αλλαγη στην αρχικη συνθηκη που δινει λυση κοντα στην αρχικη δηλ παρομοιες λυσεις

①,② οχι ευσταθης , οι λυσεις απομακρυνονται

Για δοσμενες αρχικες τιμες $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, θεωρουμε το ΠΑΤ

$$\begin{cases} y' = f(t,y) , & t \in [0,b] \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z' = f(t,z) , & t \in [0,b] \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

Αν η f ικανοποιει τη συνθηκη Lipschitz τοτε αποδεικνυεται οτι:

$$\max_{t \in [0,b]} |y(t) - z(t)| \leq e^{L(b-a)} |y_0 - z_0|$$

■ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Για μια γενική συνάρτηση f, μπορεί να μην μπορούμε να δώσουμε την λύση σε κλειστή μορφή, αλλά να μπορούμε να εγγυηθούμε για ύπαρξη και μοναδικότητα

▶ (1) ΠΑΤ: $\begin{cases} y' = f(t,y) & , t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Έστω ότι η f είναι ένα πολυώνυμο 1ου βαθμού της $y(t)$, τότε το

ΠΑΤ: $\begin{cases} y'(t) = \underbrace{p(t)\,y(t) + q(t)}_{f(t,y(t))} & , t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Αν $p, q \in C^0[a,b]$

Τότε η λύση $y(t) = e^{\int_a^t p(\tau)\,d\tau} \left[\underbrace{c}_{=y_0} + \int_a^t q(s)\, e^{-\int_a^s p(\tau)\,d\tau} ds \right]$, $t \in [a,b]$

2 → Γενικά οι μορφές της f για τις οποίες μπορώ να εξασφαλίσω Υ και Μ είναι: $\begin{cases} f(t,y) = p(t)\,y(t) + q(t) & : \text{Γραμμικές} \\ f(t,y) = p(t)\sin y & : \text{Μη γραμμικές} \end{cases}$

Για αυτές τις μορφές μπορώ να εφαρμόσω το θεώρημα 1

μπορώ και $\cos y$ αν όμοιος $\tan y$, $\cot y$ πρέπει να είναι φραγμένες

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

ΠΑΤ: $\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} & , 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρώ αρχικά ότι μια προφανή λύση είναι $y(t) = 0$ (Τετριμμένη)

Γενικά τώρα έχω:

$\frac{y'}{\sqrt{|y|}} = 1$, $|y(t)| > 0$, $\forall t \in [0,1]$

$$\overset{y(t)>0}{\Rightarrow} 2\left(\sqrt{y(t)}\right)' = 1 \overset{\text{ολοκλ.}}{\Rightarrow} 2\int_{t^*}^{t} \left(\sqrt{y(s)}\right)' ds = \int_{t^*}^{t} ds \Rightarrow$$

$$\sqrt{y(t)} - \sqrt{y(t^*)} = \frac{t-t^*}{2} \Rightarrow \sqrt{y(t)} = \frac{t-t^*}{2} + \sqrt{y(t^*)} \Rightarrow$$

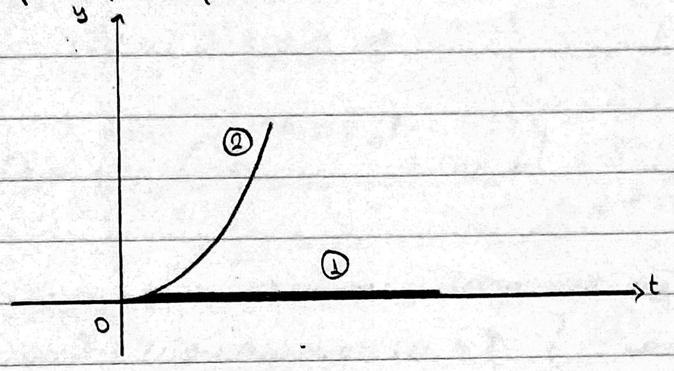
$$\boxed{y(t) = \left(\frac{t-t^*}{2} + \sqrt{y(t^*)}\right)^2}, \quad t^* \le t \le 1, \quad y \in C^1[0,1]$$

{εδώ έχουμε $t^*=0$}

↳ Αναλυτική λύση

Για $t^*=0$ έχω: $y(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^2$, $t \in [0,1]$ Έχω μια παραβολή

→ Γραφική παράσταση:



Όποτε έχω δύο λύσεις

- $y(t) = (t/2)^2$
- $y(t) = 0$

⊛ Προβλήματα με περισσότερες λύσεις από μια τότε ο υπολογιστής δεν μπορεί να το λύσει εύκολα

■ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Λύσεις προβλημάτων που δεν λύνονται μονοσήμαντα είναι πολύ δύσκολο να προσεγγιστούν αριθμητικά.

{η f συνδέεται με τη y' άρα όταν μιλάω για την f συνεπάγεται ότι έχω δεδομένα για την y', για αυτό μιλάω τόσο για την f}

■ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Αν η f είναι παραγωγίσιμη ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, την y και ισχύει ότι:

{Σημαίνει ότι η f_y φραγμένη}

$\exists M \in \mathbb{R}, \ \forall t \in [a,b], \ \forall y \in \mathbb{R} : \ |f_y(t,y)| \le M$

τότε η f πληροί τη συνθήκη Lipschitz

▸ Αυτό διαπιστώνεται με τη βοήθεια του Θεωρήματος Μέσης Τιμής

Απλ: $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $f(t,y_1) - f(t,y_2) = f_y(t,\tilde{y})(y_1-y_2)$ ΘΜΤ

$\Rightarrow |f(t,y_1)-f(t,y_2)| = |f_y|\,|y_1-y_2| \underset{f_y \text{ φραγμ.}}{\le} M \cdot |y_1-y_2| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ισχύει η συνθήκη Lipschitz με $L=M$

2. Οι γραμμικές είναι πιο εύκολες διότι είναι φραγμένες!

 # ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ #

Αν $f(t,y)=y^2$ δ.ο ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz $f_y(t,y)=2y$

και όταν $y \to \pm\infty$ τότε $|f_y(t,y)| \to \infty$

↳ Όχι φραγμένη

■ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:**

Η συνθήκη Lipschitz καλείται ολική συνθήκη Lipschitz γιατί ισχύει $\forall\, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ και αν ισχύει έχουμε $\forall$ και M σε όλο το $[a,b]$

■ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:**

Η συνέχεια της f εξασφαλίζει την ύπαρξη της λύσης του Π.Α.Τ σ' ένα διάστημα της μορφής $[a,c]$ με $c>a$, δεν εξασφαλίζει όμως την μοναδικότητα.

 # ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 #

Αν $f(x)=\sqrt{|x|}$ τότε για το ΠΑΤ: $\begin{cases} y' = \sqrt{|y|}, & t \in [0,1] \\ y(0)=0 \end{cases}$

 # ΑΠΑΝΤΗΣΗ #

Δεν ισχύει τοπικά η συνθήκη Lipschitz (κοντά στο 0), διότι

$f_y = \frac{1}{2\sqrt{|y|}} \to \infty$ όταν $y \to 0^+$ δηλ απειρίζεται η παράγωγος και έτσι δεν είναι φραγμένη

→ θα το χρησιμοποιουμε συνεχεια παρακατω

■ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ: ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΛΥΣΗΣ ΤΟΥ ΠΑΤ

ΠΑΤ (α) $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ (β): $\begin{cases} z' = f(t,z) & , t \in [a,b] \\ z(a) = z_0 \ (= y_0 + \varepsilon) & , \varepsilon < 1 \end{cases}$

Εστω οτι η f ικανοποιει την ολικη συνθηκη του Lipschitz. Τοτε τα ΠΑΤ (α) και (β) θα εχουν μοναδικες λυσεις $y, z \in C^1[a,b]$

Θετω $\varepsilon(t) = y(t) - z(t)$ (Σφαλμα) και θελουμε να αντιμετωπισουμε την $|\varepsilon(t)|$ ως συναρτηση $|\varepsilon_0| = |y_0 - z_0|$

$\varepsilon'(t) = y'(t) - z'(t) = f(t,y) - f(t,z)$ για $t \in [a,b] \Rightarrow$

$\varepsilon(t)\,\varepsilon'(t) = \varepsilon(t)\,(f(t,y) - f(t,z))$, χρησιμοποιωντας την ολικη συνθηκη Lipschitz:

$$\varepsilon(t)\,\varepsilon'(t) = \frac{1}{2}(\varepsilon^2(t))' = \underbrace{|f(t,y) - f(t,z)|}_{\leq L \cdot |\varepsilon(t)|} \cdot |\varepsilon(t)| \overset{\text{συνθ L.}}{\leq} L \cdot \varepsilon^2(t)$$

→ Διαφορικη ανισωση

$\varepsilon^2 = \phi(t)$

$\Rightarrow \quad \phi'(t) - 2L\phi(t) \leq 0 \quad , t \in [a,b]$

Λυνω πρωτα τη δ.α : $\phi'(t) - 2L\phi(t) \leq 0$

ολοκλ. παρ: e^{-2Lt} : $\phi'(t)\,e^{-2Lt} - 2L\phi e^{-2Lt} \leq 0 \Rightarrow (e^{-2Lt}\phi)' \leq 0$

Αρα η $e^{-2Lt} \cdot \phi(t)$ ειναι φθινουσα συναρτηση στο $[a,b]$

Δηλαδη $e^{-2Lt}\,\phi(t) \leq e^{-2La}\,\phi(a) \quad , t \in [a,b]$

Τελικα εχω $|\varepsilon(t)| \leq e^{L(t-a)} \cdot \underbrace{|\varepsilon(a)|}_{= y(a) - z(a) \text{ : Αρχικο Σφαλμα}} \quad , t \in [a,b]$

Μπορουμε τωρα να γραψουμε οτι

$$\max_{t \in [a,b]} |y(t) - z(t)| \leq e^{L(b-a)} \cdot |\varepsilon(a)| \quad \text{οπου} \quad |\varepsilon(a)| = |y_0 - z_0| \quad (*)$$

- $\|y\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} |y(t)|$

■ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Η σχεση (*) εφαρμοζει τη συνεχη εξαρτηση των y του ΠΑΤ (α) στην νορμα απειρου, $\|\cdot\|_\infty$ απο τα αρχικα δεδομενα $y_0 \in \mathbb{R}$